المراجعة المركزة

لمادة: الرياضيات

للاستاذ / قصي هاشم

برنامج رحلتي في السادس

بداية العمل في ٢٠١٤
التأسيس ٢٠١٥/٩/٣٠

حملة شبابنا

من نحن: مجموعة من الشباب في مختلف المحافظات يعملون على خدمة المجتمع من خلال الاعمال الخيرية والتطوعية والثقافية وبشكل مستقل ودعم ذاتي

ان احد مشاريع حملة شبابنا التطوعية لخدمة الطلاب هو :

برنامج رحلتي في السادس

هو اول مشروع تعليمي تنموي مختص بطلاب السادس الاعدادي في العراق
تم اطلاقه لخدمة الطلاب مجانا وبمختلف المجالات ومن اهمها :

- توفير الملازم الدراسية
- حلول الاسئلة وزارية
- نصائح من افضل المدرسين
- فديوات شرح لجميع المواد
- تنظيم اعمال تطوعية
- توزيع الملازم مجانا للمحتاجين

ما هي اهداف برنامج رحلتي في السادس

نحن نهدف من خلال برنامجنا الى تقديم المساعدة لطلاب السادس بكافة الوسائل الممكنة ونهدف الى غرس مفهوم العمل من دون مقابل ... العمل لله تعالى لذا نحن سنكون عونا لكل من يحتاج الينا ... ومن دون اي مقابل

ممن يتكون برنامج رحلتي في السادس

- مؤسس البرنامج : وهو علي حاكم خيون الميالي مسؤول حملة شبابنا
- ادارة البرنامج : يتم ادارة البرنامج عن طريق اعضاء حملة شبابنا في العراق
- كادر البرنامج : مجموعة طلاب من مختلف انحاء العراق يقومون بالعمل لاعداد الملازم والنشر والنصائح وغيرها من الامور بأشراف (هاجر حسين)

يمكنكم التواصل معنا من خلال مواقعنا على الانترنيت

برنامج رحلتي في السادس

تابعونا على : الفيس بوك / التلكرام / الكوكل / اليوتيوب/ او من خلال تطبيقنا على الاندرويد

عزيزي الطالب ان اسئلة المراجعة المركزة ما هي الا جمع لاهم افكار المنهج حسب وجهة نظر واضعها وهي تعتبر مادة الساعات الاخيرة قبل الامتحان الوزاري ولا تعتبر بديلا عن الكتب فهي لاتمثل بالضرورة نفس الاسئلة الوزارية . وسوف يتم عرض مجموعة من الاسئلة عن كل فصل والمطلوب من الطالب الشروع في حلها بعد الانتهاء من قراءة ذلك الفصل لتتحقق من مدى جديته في السيطرة على مفردات المنهج . وانصح الطالب وضع دفتر خاص لحلول هذه الاسئلة ليتسنى له مراجعتها في ليلة الامتحان كسبا للوقت كما وانصح الطالب عند قراءته لكل فصل ان يستخدم الاقلام الفسفورية للتأشير على بعض الاسئلة فالاسئلة التي تحتاج الى جهد كبير لاستحصالها يؤشر عليها بالقلم الاحمر وتضاف فيما بعد الى دفتر حلول اسئلة المراجعة المركزة لانها حتما تحتاج الى مراجعتها مجددا ليلة الامتحان

لمحات مطمئنة للفصل الاول

1) اذا كانت i مرفوعة الى اي عدد طبيعي موجب غير العدد (1) يجب ان تخفض فاذا كانت القوة تقبل القسمة على 4 بدون بقي فانها تساوي (1) واذا كان باقي القسمة على 4 يساوي 1 فانها تساوي i واذا كان باقي القسمة على 4 يساوي 2 فانها تساوي (-1) واذا كان باقي القسمة على 4 يساوي 3 فانها تساوي (-i) اما اذا كانت i مرفوعة الى قوة صحيحة سالبة فيتم ضربها بـ i مرفوعة الى اقرب قوة تقبل القسمة على 4 اكبر من مطلق القوة الاصلية ثم نستخدم التفصيل السابق اما اذا وجدت i لوحدها في المقام فهنالك طريقان الاول نقوم بتخفيضها حسب التفصيل السابق وان بقيت i موجودة فنضرب البسط والمقام بالعامل المنسب اما الطريق الثاني فنقوم بضرب البسط بالعدد 1 ونعبر عنه بـ i مرفوعة الى اقرب قوة تقبل القسمة على اربعة اكبر من قوة المقام للاستفادة من الخاصية (عند القسمة تطرح الاسس)

$i^{15} = -i$ (لان باقي القسمة على 4 يساوي 3) , $i^{-19} = i^{-19} \cdot i^{20} = i$, $\frac{2}{3i^{13}} = \frac{2i^{16}}{3i^{13}} = \frac{2}{3}i^{3} = \frac{-2}{3}i$

2) اذا وجدت الاشارة السالبة تحت الجذر التربيعي ووجد قربها عدد طبيعي موجب فتحول السالب الى i خارج الجذر تلقائيا قبل البدء بحل السؤال . $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\,i$, $\sqrt{-4} = 2i$

3) يفضل عدم جمع او طرح او ضرب او قسمة او ايجاد الجذور او التحويل الى الصيغة القطبية لاي عدد مركب الا بعد تحويله الى الصيغة الجبرية $a + bi$.

4) اذا وجد i في المقام نحول جعل البسط والمقام بصيغته الجبرية ثم نضرب كل من البسط والمقام بمرافق المقام علما ان $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$. كما انه اذا وجد عدد سالب تحت الجذر التربيعي يحول بدلالة i حيث ان $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$ قبل البدء بالحل .

5) عند تساوي عددين مركبين فإن الحقيقي يساوي الحقيقي والتخيلي يساوي التخيلي ولا يمكن تطبيق هذه الخاصية الا اذا كان كل من الطرفين عددا مركبا واحدا بصيغته الجبرية .

6) اذا كان $a+bi$ عددا مركبا فان مرافقه $a-bi$ ونظيره الجمعي $-a-bi$ ونظيره الضربي $\frac{1}{a+bi}$

7) لمعرفة ان الجذران مترافقان يجب ان يكونا غير حقيقين وكان مجموعهما وحاصل ضربهما عدد حقيقي واذا كانا حقيقين يجب ان يكونا متساويين .

8) اذا طلب ايجاد معادلة تربيعية ذات المعاملات الحقيقية وعلم احد الجذرين فان الجذر الاخر يكون مرافقه مع التأكيد على ان مرافق العدد الحقيقي هو العدد نفسه. علما ان المعادلة التربيعية اذا علم جذراها L , M هي $x^2-(M+L)x+ML=0$

س11 أ) جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$

ans: $\begin{cases} x=2 \rightarrow y=-1 \\ x=-2 \rightarrow y=1 \end{cases}$

ب) اذا كان $\frac{7-4i}{1-2i}$, $\frac{x+yi}{5-4i}$ مترافقان جد قيمتي x , y

ans: $x=7$, $y=-22$ مجموعة الحل

س12\ اذا كان $c,d \in R$ وكان $c+di=\frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c-di}$.

ans: $\sqrt{4+3i}=\left(\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)$

س13 جد مجموعة حل المعادلة التالية في مجموعة الاعداد المركبة $M^2-3M+1+3i=0$

ans: $\{3-i\ ,\ i\}$

س14 اذا كان $3+i$ احد جذري المعادلة $x^2-ax+5+5i=0$ جد قيمة a الجذر الاخر .

ans: $a=5+2i$, $2+i$ الجذر الآخر

9) تحويل اي عدد مركب الى صيغته القطبية هناك حالتان

أ) اذا كان العدد المركب حقيقي صرف او تخيلي صرف فيحول الى الصيغة القطبية بخطوة واحدة حسب التلخيص التالي . لكل $a \in R^*$ فان

$a = a(\cos 0 + i\sin 0)$, $-a = a(\cos\pi + i\sin\pi)$

$ai = a(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, $-ai = a(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

ب) اذا كان العدد المركب بصيغته الجبرية مكون من جزئين حقيقي وتخيلي $a+bi$ فيجب تحويله الى صيغته القطبية بستة مراحل وهي $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\sin\theta = \frac{b}{r}$

ومن ثم استخراج زاوية الاسناد بعد اهمال الاشارة ومن ثم حساب قيمة θ بعد ارجاع الاشارة ثم كتابة الصيغة الديكارتية وهي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

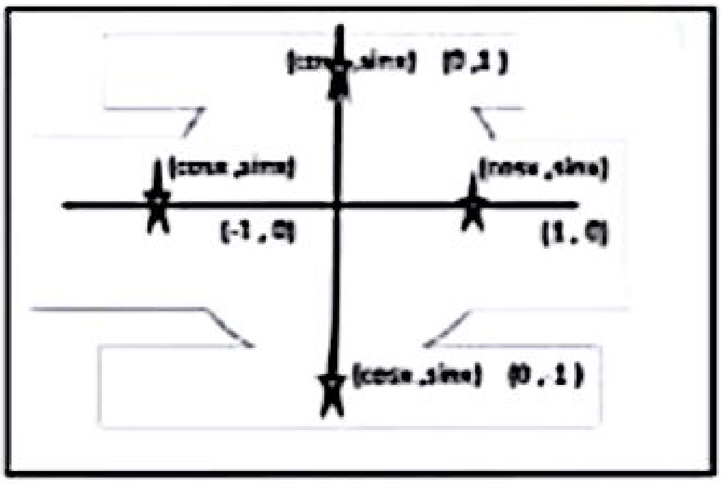
13) مبرهنة ديموافر $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ \forall\ n \in N\ ,\ \theta \in R$

نتائج ديموافر $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-n} = r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta)\ \forall\ n \in N\ ,\ \theta \in R$

$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

تحذير $r^{-n} = \frac{1}{r^n} \neq r^{\frac{1}{n}}$

$\theta = \pi - \delta$ sinx , cscx (+)	$\theta = \delta$ any (+)
Tanx ,cotx (+) $\theta = \pi + \delta$	cosx , secx (+) $\theta = 2\pi - \delta$



بعد تطبيق مبرهنة ديموافر او احدى نتائجها فان الزاوية الناتجة يتم التعامل معها حسب التفصيل التالي

1) يجب التحقق من عدم وجود اختصار بين البسط والمقام في الزاوية $\frac{a\pi}{b}$.

2) اذا كانت $\frac{a}{b}$ في الزاوية $\frac{a\pi}{b}$ اكبر من (2) فهذا يعني انها ليست بقياس الرئيس وتحويلها الى ذلك هناك عدة طرق منها (نختار اقرب عدد زوجي اصغر من ناتج القسمة يضرب في المقام ويطرح ناتجه من البسط مقسوما على نفس المقام)

3) اذا كان مقام الزاوية الناتجة بعد ماذكر اعلاه (6 , 4 , 3 , 2 , 1) وكانت ضمن الدورة الاولى لقيمها وجوه فاذا كان المقام {2 , 1} نستخرج قيمتها من دائرة الوحدة مباشرة . اما اذا كان مقامها {6 , 4 , 3} نستخدم الطريقة الواردة في الفرعين {b , a} حيث نقوم بحساب موقع الزاوية كالـ($\frac{a\pi}{b}$) لتحديد الربع الذي تقع فيه ثم نحسب قيمة a ثم نستبدلها بحسب اشارة الربع الذي تقع فيه الزاوية الاصلية خارج الناتج .

4) اذا كان ليس او مماسيق فتبقى الزاوية على حالها .

5) $\cos(-x)=\cos x$, $\sec(-x)=\sec x$ دوال زوجية

6) $\sin(-x)=-\sin x$, $\csc(-x)=-\csc x$, $\tan(-x)=-\tan x$, $\cot(-x)=-\cot x$ دوال فردية

7) اذا كان الزاوية الناتجة $a\pi$ فتقرأ صفرا ان كان a زوجيا وتقرأ π ان كان a فرديا .

a) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

b) $\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

c) $\sin\frac{4\pi}{6} = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = \frac{-1}{2}$

d) $\sin\frac{29\pi}{6} = \sin(\frac{[29-(4)(6)]}{6}\pi) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

e) $\cos\frac{49\pi}{4} = \cos(\frac{[49-(12)(4)]}{4}\pi) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\cos\frac{-19\pi}{6} = \cos\frac{19\pi}{6} = \cos(\frac{[19-(2)(6)]\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

س17 باستخدام مبرهنة ديموافر جد بابسط صورة

a) $(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})^3$ ans: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

b) $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$ ans: $\cos\theta + i\sin\theta$

س18 جد مجموعة حل المعادلة التالية في c باستخدام طريقة التحليل مرة وباستخدام مبرهنة ديموافر مرة اخرى

$x^3 - 8i = 0$ ans: $\{\sqrt{3}+i , -\sqrt{3}+i , -2i\}$

س19 اذا كان $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عددا مركبا جد باستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$ مرة وباستخدام الفرضية مرة اخرى

ans: $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i , \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

خاص بالسادس التطبيقي

1) خواص ω هي $\omega^3 = 1$ ، $1 + \omega + \omega^2 = 0$ نستنتج من الخاصيه (1) مايلي

$1+\omega = -\omega^2$, $1+\omega^2 = -\omega$, $\omega + \omega^2 = -1$, $\omega = -1-\omega^2$, $\omega^2 = -1-\omega$, $1 = -\omega-\omega^2$

2) اذا كانت ω مرفوعة الى اي عدد طبيعي موجب غير العددان 1 ، 2 يجب ان نحمص فيكون الجواب (1) اذا كان العدد يقبل القسمة على 3 بدون باق . ويساوي ω اذا كان باقي القسمة على 3 يساوي 1 . ويساوي ω^2 اذا كان باقي القسمة على 3 يساوي 2 .

3) اذا وجدت ω او ω^2 لوحدها في المقام بشكل مباشر او بشكل غير مباشر اي يمكن ان نؤول الى ذلك باستخدام الخواص اعلاه فيفضل ضرب بسطها بالعدد واحد ونعبر عنه ب ω مرفوعة الى قوه تقبل القسمة على 3 اكبر من قوه المقام للاستفادة من الخاصة عند القسمه نطرح الاسس .

$\omega^{10} = \omega$, $\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$, $\frac{1}{1+\omega} = \frac{\omega^3}{-\omega^2} = -\omega$, $\frac{3i}{1+\omega^2} = \frac{3i}{-\omega} = \frac{3i\omega^3}{-\omega} = -3i\omega^2$

س11 اثبت ان $\left(\frac{1}{2-\omega} - \frac{1}{2-\omega^2}\right)^2 = \frac{-3}{49}$

س12 جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(\frac{3i}{\omega^2} - \frac{2\omega^2}{i}\right)$, $\left(\frac{3i}{\omega} - \frac{2\omega}{i}\right)$ ans : $x^2 + 5ix - 7 = 0$

تلميح !! اذا وجدت ω لوحدها في المقام نضرب بسطها في ω^3 لاجل الاختصار اما اذا وجد i لوحده في المقام يضرب بالسالب او يضرب بسطه في (i^2) لاجل الاختصار

س13 جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي احد جذراها $\left(\frac{2\omega+3}{3\omega^2+5}\right)^3 + 2i$

المعادلة هي ans : $x^2 - 2x + 5 = 0$

س14 اثبت ان $\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^{100} = \frac{-1}{8}\left(1 - \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\right)^3$

لمحات مضيئة للفصل الثاني (القطوع المخروطية)

1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(p,0)$ تقع على محور السينات الموجب x-axis

ومعادلة دليله $x = -p$ هي

$$y^2 = 4px$$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(-p,0)$ تقع على محور السينات السالب x-axis

ومعادلة دليله $x = p$ هي

$$y^2 = -4px$$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(0,p)$ تقع على محور الصادات الموجب y-axis

ومعادلة دليله $y = -p$ هي

$$x^2 = 4py$$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(0,-p)$ تقع على محور الصادات السالب y-axis

ومعادلة دليله $y = p$ هي

$$x^2 = -4py$$

2) لايجاد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الاصل فان السؤال سيكون باحد الاحتمالات السبعة التالية وهي اذا علمت بؤرته نستنتج منها قيمة p والموقع ثم نكتب القانون ومن بعدها التعويض المباشر . واذا علمت معادلة الدليل نستنتج من خلالها البؤرة حيث ان اشارة الدليل هي عكس اشارة البؤرة ثم نكمل حسب ما سبق . واذا علمت نقطة تنتمي اليه فانها تحقق معادلته فاذا علم موقع البؤرة نكتب المعادلة المناسبة ثم نعوض بالنقطة المنتمية (x,y) لاستخراج قيمة p الموجبة حتما ثم نعيد تعويضها بالمعادلة واذا لم يعلم موقع البؤرة فنأخذ احتمالات فمثلا النقطة تقع بالربع الثاني فان البؤرة تقع على السيني السالب او الصادي الموجب وهكذا . واذا مر القطع المكافئ بنقطتين تقعان في ربعين متجاورين فان البؤرة تقع على محور تناظر الربعين . اما اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة فان معادلة الدليل هي x تساوي المسقط الاول من النقطة اذا كانت البؤرة تقع على محور السينات او تكون معادلة الدليل هي y تساوي المسقط الثاني من النقطة اذا كانت البؤرة تقع على محور الصادات ثم نحسب المعادلة حسب الاحتمال الثاني . اما اذا مر دليل القطع المكافئ بنقطتين مختلفتين فان معادلة الدليل هي x OR y يساوي المسقط المتساوي من النقطتين . واذا مر دليل القطع المكافئ بنقطة تقع على احد المحورين اي ان احد مسقطيها صفرا فان البؤرة تقع على نفس المحور بالاتجاه الاخر . علما النقطة التي تنتمي الى دليل القطع المكافئ لايمكن ان تحقق معادلة القطع المكافئ .

3) اذا مر القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل بنقطة تقع على احد المحورين الا حداثيين فان تمثل الرأس او القطب حصرا حسب موقع البؤرة او حسب القيمة الاكبر حيث ان البؤرة والرأس يقعان على نفس المحور دائما اما اذا مر القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل بنقطة تقع على احد المحورين فانها تمثل الرأس حتما والبؤرة تقع على نفس محور الرأس ايضا . اما اذا مر القطع المخروطي بنقطة اعتيادية فانها تحقق معادلته اي انها تمثل (x,y)

4) اذا وجد قطعان زائد وناقص مركزاهما نقطة الاصل وكان كل منهما يمر ببؤرة الاخر فان بؤرتي الناقص هما رأسي الزائد ورأسي الناقص هما بؤرتي الزائد .

5) مساحة القطع الناقص هي $a\,b\,\pi$ اما محيطه فهي $2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ اما مساحة المستطيل المركزي في القطع الزائد فهي 4ab .

6) اذا كانت بؤرة القطع المكافئ هي احدى بؤرتي القطع الناقص او الزائد فان $p = c$
واذا كانت بؤرة القطع المكافئ هي احد رأسي القطع الناقص او الزائد فان $p = a$
واذا كانت بؤرة القطع المكافئ هي احد قطبي القطع الناقص او الزائد فان $p = b$
واذا كانت بؤرة القطع المكافئ تمر بالقطع الزائد فان $p = a$ اما اذا مرت بؤرة القطع المكافئ بالقطع الناقص فان $p = a$ OR $p = b$ حسب معطيات السؤال . علما ان هذه الفقرة تشمل القطوع المخروطية القياسية بدون انسحاب .

7) اذا قطع احد القطعين الناقص او الزائد قطعا مكافئا عند نقطة علم احد مسقطيها فيتم تعويض هذا المسقط بمعادلة القطع المكافئ ليتم حساب المسقط الاخر وعندها تكون النقطة الناتجة محققة للقطع الناقص او الزائد .

8) اذا مس دليل القطع المكافئ قطعا ناقصا او زائدا فيجب حساب معادلة الدليل فاذا كانت معادلة الدليل x=n فان نقطة التماس هي (n , 0) واذا كانت معادلة الدليل y=m فان نقطة التماس هي (0 , m) وان اي من هذه النقاط تمثل الرأس او القطب بالنسبة للقطع الناقص وتمثل الرأس بالنسبة للقطع الزائد كما ورد ذكره في الفقرة الثالثة .

9) اذا كانت احدى بؤرتي قطع ناقص تبعد عن الرأسين بعددين فان مجموعهما 2a وفرقهما الموجب 2c واذا كان احد رأسي قطع زائد يبعد عن البؤرتين بعددين فان مجموعهما 2c وفرقهما الموجب 2a وفي كلتا الحالتين يكون حاصل ضربهما b^2 ونستخدم للتحقيق فقط .

س1 \\ القطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الاصل ، كل منهما يمر ببؤرة الآخر فاذا كانت معادلة القطع الناقص $9x^2 + 25y^2 = 225$ فجد

أ) مساحة القطع الناقص ، ب) محيط القطع الناقص، ج) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه د) الاختلاف المركزي لكل منهما .

مساحة القطع الناقص $A = 15\pi$ محيط القطع الناقص $P = 2\sqrt{17}\,\pi$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

الاختلاف المركزي للقطع الناقص $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ ، الاختلاف المركزي للقطع الزائد $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

س2 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3} , \sqrt{3})$.

asn : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

س3 \\ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$

ans: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

س4 \ جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي الى محور السينات x axis ودليله يمر بالنقطة $(5 , 4)$ واذا علمت ان النقطة $(-5 , a+2)$ تنتمي الى القطع المكافئ جد قيمة a ؟

ans : $\{0 , -12\}$

س6 \ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بالنقطتين $(-2 , 2) , (3 , \frac{\sqrt{6}}{2})$.

ans : $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$

س5 \\ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = -24y$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$.

ans : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$

س6 \\ جد أ) معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات واحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين 3 , 7 .

ب) معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل واحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 3 , 7 .

ans : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$, $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{21} = 1$

س7 \\ النقطة $(\frac{1}{3} , 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

ans : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

((انتبه ـــ)) في السؤال السابق اذا كان النسبة بين طولي محوريه $\frac{4}{5}$ فيكون $\frac{2b}{2a} = \frac{4}{5}$.

س8// القطع الناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ ما قيمة كل من h , k .

Ans : $h = 4$, $k = 6$

س9 // جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (0 ، 5) ، (0 ، 5-) ورأساه (0 ، 3)، (0 ، 3-)

ans : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

س10 // قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي ($6\sqrt{2}$) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h , k الحقيقيتان .

ans : $h = 5$, $k = 9$

خاص بالسادس التطبيقي

1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(p,0)$ تقع على محور السينات الموجب x-axis

ومعادلة دليله $x = -p$ هي $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h,k) وبؤرته $F(h+p,k)$ تقع على مستقيم يوازي محور السينات معادلته $y=k$ ومعادلة دليله $x = h - p$ هي $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(-p,0)$ تقع على محور السينات السالب x-axis

ومعادلة دليله $x = p$ هي $y^2 = -4px$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h,k) وبؤرته $F(h-p,k)$ تقع على مستقيم يوازي محور السينات معادلته $y=k$ ومعادلة دليله $x = h + p$ هي $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(0,p)$ تقع على محور الصادات الموجب y-axis

ومعادلة دليله $y = -p$ هي $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h,k) وبؤرته $F(h,k+p)$ تقع على مستقيم يوازي محور الصادات معادلته $x=h$ ومعادلة دليله $y = k - p$ هي $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته $F(0,-p)$ تقع على محور الصادات السالب y-axis

ومعادلة دليله $y = p$ هي $x^2 = -4py$

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (h,k) وبؤرته $F(h,k-p)$ تقع على مستقيم يوازي محور الصادات معادلته $x=h$ ومعادلة دليله $y = k + p$ هي $(x-h)^2 = -4p(y-k)$

2) اذا كانت معادلة القطع المكافئ لاتشبه الصورة القياسية فيمكن تحويلها الى الصورة القياسية بإتباع الخطوات

a. يجب جعل المتغير التربيعي مع قرينه بالطرف الايسر و باقي الحدود بالطرف الايمن .
b. يجب جعل معامل المتغير التربيعي يساوي (واحد) وذلك بقسمة كل المعادلة على او عدد غير العدد 1 .
c. نضيف للطرفين مربع نصف معامل المتغير القرين للمتغير التربيعي (المتشابه له) لكي يصبح الطرف الايسر مكون من ثلاثة حدود .
d. جعل الطرف الايسر بالصورة $(\sqrt{\text{الاول}}$ اشارة الحد الثاني $\sqrt{\text{الثالث}})^2$.
e. جمع الحدود المتشابهة بالطرف الايمن ثم نسحب عامل مشترك لتجعل معامل المتغير القريب يساوي واحد (علما انه لايجوز القسمة او الضرب بأي عدد في هذه المرحلة ويجوز فقط استخراج عامل مشترك .
f. المقارنة بالصورة القياسية ثم استخراج المطلوب .
g. في حالة فقدان او حد من الخطوات اعلاه فان معاملة يساوي صفرا .

3) اذا كانت معادلة القطع المخروطي (الناقص او الزائد) لاتشبه احدى الصورتين القياسيتين فيمكن تحويلها الى الصورة القياسية بالخطوات التالية .

a) جعل كل متغير تربيعي وقرينه بالطرف الايسر ونقل الحد الثابت بالطرف الايمن .
b) استخراج عامل مشترك من كل زوج من حدود الطرف الايسر لجعل معامل كل متغير تربيعي يساوي (1) .
c) اضافة مربع نصف معامل كل قرين للطرف الايسر وكل عدد تم اضافته للطرف الايسر يضرب بالعامل المشترك ويضاف الى الطرف الايمن .
d) تحويل كل ثلاث حدود في الطرف الايسر الى مربعا كاملا (مع الابقاء على العامل المشترك) وجمع الحدود المتشابهة بالطرف الايمن .
e) قسمة المعادلة على الطرف الايمن لجعله يساوي (1) لتحويلها الى الصورة القياسية .
f) في حالة فقدان أو قرين فان معامله يساوي صفرا فمثلا نجد ax^2 ولم نجد معها المتغير x فيمكن اعتباه $a(x-0)^2$ وهكذا بالنسبة للمتغير y .
g) قبل البدء بالحل اذا وجد عدد يقبل القسمة على كل المعادلة يفضل اجراء عملية القسمة او وجد في المعادلة مقام غير العدد (1) فيفضل ضرب المعادلة بهذا المقام قبل الشروع بالحل .

س11 جد احداثيي البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$ ؟

ans : $F(-1, 0)$ البؤرة , $V(-1, -2)$ الرأس , $x = -1$ معادلة المحور , $y = -4$ معادلة الدليل

س12 \ جد البؤرتين والرأسين والقطبين والاختلاف المركزي للقطوع المخروطية التالية

a) $9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$

البؤرتان هما $F_1(4+\sqrt{7}, 3)$, $F_2(4-\sqrt{7}, 3)$

الرأسان هما $V_1(8, 3)$, $V_2(0, 3)$ و القطبان هما $M_1(4, 6)$, $M_2(4, 0)$

b) $9y^2 - 4x^2 + 36y - 40x - 100 = 0$

البؤرتان هما $F_1(-5, -2+\sqrt{13})$, $F_2(-5, -2-\sqrt{13})$

الرأسان هما $V_1(-5, 0)$, $V_2(-5, -4)$ و القطبان هما $M_1(-2, -2)$, $M_2(-8, -2)$

برنامج رحلتي في السادس

لمحات مضيئة للفصل الثالث (المسائل المرتبطة بالزمن)

1) خطوات الحل العامة في اسئلة المسائل المرتبطة بالزمن هي فرض المتغيرات بأسماء معينة ثم ايجاد علاقة بين المتغيرات وسوف نقسم العلاقات الى قسمين اساسية التي يتم اشتقاقها وثانوية التي نحسب بها قيم معينة او نقلص بها عدد المتغيرات قبل او بعد الاشتقاق ، ثم اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن ثم التعويض عن المعلوم لايجاد المجهول .

2) اذا علم ضلعين في مثلث قائم الزاوية بشكل دائم او موقت وعلم معدل تغير ضلع فيه فيثاغورس تكون علاقة اساسية او ثانوية . واذا علم او طلب معدل تغير زاوية في مثلث قائم الزاوية فان العلاقة الاساسية هي دالة مثلثية ويفضل ان تربط بين ثابت ومتغير ويفضل ان يكون الثابت في المقام والعلاقة الثانوية غالبا ستكون فيثاغورس . واذا علمت زاوية في مثلث قائم الزاوية بشكل موقت فان العلاقة الاساسية غالبا ما تكون فيثاغورس اما العلاقة الثانوية فهي دالة مثلثية ويفضل ان تربط بين متغيرين .

3) اذا علم او طلب معدل تغير قانون محيط او مساحة او حجم لشكل هندسي فان ذلك القانون يمثل علاقة اساسية .

4) اذا وجدت مثلث متشابهة في اي سؤال فان تشابه مثلث او قانون الظل يمكن ان يكون علاقة اساسية او ثانوية .

5) اذا علم او طلب نقطة تنتمي الى منحني معلوم المعادلة بحيث يكون معدل ابتعادها او اقترابها عن نقطة معلومة معلوما او مجهولا فان قانون المسافة هي العلاقة الاساسية ومعادلة المنحني هي العلاقة الثانوية .

6) اذا طلب ايجاد نقطة تنتمي الى منحني معلوم المعادلة دون ان يطلب او يعلم معدل ابتعادها او اقترابها عن نقطة ثابتة فان معادلة المنحني تمثل العلاقة الاساسية .

7) اذا علم او طلب معدل تغير سمك القشرة الخارجية لشكل هندسي فان العلاقة الاساسية هي الفرق بين حجم الشكل الكلي وحجم الشكل الصغير اما هذا السمك فيضاف من جهتين بالنسبة للمكعب ولجهة واحدة بالنسبة للكرة .

س1 // لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7,0) يساوي 0.2 unit/s جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$.

ans : $\frac{dx}{dt} = -1$ unit/s

س2 // مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$

1) جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل 12 cm ج $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}$ cm/s

2) جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل 4 cm ج $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{12\pi}$ cm/s

س3 // سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2 m/s جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

ans: $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ m/s معدل انزلاق طرفه العلوي

س4 // مكعب صلد طول حرفه 8 m مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا ، فاذا بدأ الجليد بذوب بمعدل $6\ m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 m .

$\frac{dx}{dt} = -0,01$ m/s معدل تغير سمك الجليد OR $\frac{dx}{dt} = 0,01$ m/s معدل نقصان سمك الجليد

لفتات مضيئة للفصل الثالث

(مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة والتقريب)

1) من شروط مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة ان تكون الدالة مستمرة وقابلة للاشتقاق واليك بعض الملاحظات الخاصة بذلك .

- اذا كانت الدالة كثيرة حدود فانها مستمرة وقابلة للاشتقاق على أي فترة .
- اذا كانت الدالة مثلثية sinax , cosax فانها مستمرة وقابلة للاشتقاق دوما على اي فترة .
- اذا كانت الدالة نسبية فانها مستمرة على اي فترة ماعدا الفترات التي تحوي على قيم تجعل المقام صفرا واذا كانت الدالة النسبية مستمرة بالتأكيد تكون قابلة للاشتقاق .
- اذا كانت الدالة جذرية لدليل زوجي فانها تكون مستمرة على اي فترة تجعل داخل الجذر اكبر او تساوي صفر واذا كانت مستمرة فيجب ان تكون قابلة للاشتقاق .
- اذا كانت الدالة جذرية لدليل فردي فانها مستمرة دائما لان مجالها R ولايمكن معرفة قابلية اشتقاقها الا بعد الاشتقاق فاذا نزل الجذر الى المقام نستثني القيمة التي تجعل المقام صفرا اما اذا لم ينزل الجذر الى المقام فتكون قابلة للاشتقاق لان مجالها R . علما ان مجال المشتقة يقارن على الفترة المفتوحة وليست المغلقة حيث ان الفترة المغلقة تقارن عند الاستمرارية فقط .
- اذا كانت الدالة مزدوجة فيجب تطبيق الشروط كاملة في حالة الاستمرارية وقابلية الاشتقاق في حالة ان الحد الفاصل يقع داخل الفترة المعطاة اما اذا لم يقع داخل الفترة المعطاة او ان جميع عناصر الفترة تقع ضمن احد طرفي الدالة المزدوجة فيتم التعامل مع هذا الجزء فقط حسب التفصيل السابق .
- اذا كانت الدالة داخل القيمة المطلقة فتحول الى دالة مزدوجة ثم نتعامل معها حسب الاحتمال السابق .

2) اذا كانت f(x) دالة فنقول انها تحقق مبرهنة رول اذا تحققت بها الشروط التالية

- اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة [a , b]
- اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)
- f(b) = f(a)

وعندها يوجد على الاقل قيمة واحدة c ∈ (a , b) وتحقق f ′(c) = 0

3) اذا كانت f(x) دالة فنقول انها تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة اذا تحققت بها الشروط التالية

- اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة [a , b]
- اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)
- يوجد على الاقل قيمة واحدة c ∈ (a , b) وتحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

4) لإيجاد القيمة التقريبية لبعد او مساحة او حجم شكل هندسي تكتب القانون اولا فاذا علم من القانون طرفه الايمن فان القانون يمثل اسم الدالة مباشرة اما اذا علم من القانون طرفه الايسر ولا يضاف له لجزاء من الطرف الايمن فنحتاج الى التبسيط ثم اختيار اسم للدالة علما ان المقصود بالقانون هو الرموز الانكليزية من اليسار الى اليمين

5) مقدار التغير التقريبي (مقدار الخطأ) لدالة معلومة عندما يتغير احد ابعادها من قيمة الى اخرى تمثل h f ′(a) علما ان كمية الغلاف الخارجي فقط لاي شكل هندسي يحمل نفس المعنى

6) لايمكن ايجاد القيمة التقريبية لجذور الكسور العشرية المحصورة بين الصفر والواحد والبعيدة عن العدد واحد الا اذا كانت عدد المراتب على يمين الفارزة تساوي او من مضاعفات دليل الجذر.

س1 // ابحث تحقق مبرهنة رول لكل مما يلي وان تحققت جد قيمة (c) .

1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$: $x\in[-1,1]$

ans: $c=2+\sqrt{3}\notin(-1,1)$ يهمل OR $c=2-\sqrt{3}\in(-1,1)$

2) $f(x)=\cos x$: $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

ans: $c=0\notin(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ تهمل OR $c=\pi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

س2 // ابحث تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال التالية وان تحققت جد قيمة c

a) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $x\in[-4,0]$

ans: $c=\sqrt{5}\notin(-4,0)$ تهمل , OR $c=-\sqrt{5}\in(-4,0)$

b) $h(x)=2\sin x-\cos 2x$, $x\in[0,\pi]$

ans: $c=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi)$ OR $c=\{\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\}\notin(0,\pi)$

c) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $x\in[-2,7]$

الدالة لاتتحقق بها مبرهنة القيمة المتوسطة لانها غير قابلة للاشتقاق

لو كان السؤال السابق $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^4}$ على نفس الفترة ماذا تتوقع ؟؟؟؟؟

س3 // اذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ حيث $f:[0,b]\to R$, وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ جد قيمة b .

ans: $b=2$

س4 // اختبر تحقق شروط القيمة المتوسطة للدالة التالية بالفترة [-1 , 3] وان تحققت جد ان وجدت قيمة c .

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2 & , x\in[1,3]\\ 4 & , x\in[-1,1)\end{cases}$$

ans: لايمكن تحقق المبرهنة لانها غير مستمرة عند x=1

س5 / $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة [-1 , b] فاذا كانت $c\in(-1,b)$ $c=2$ فجد قيمتي $a,b\in R$.

ans: $a=1$, $b=5$

س6 // باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$

ans: 11.917

س7 // كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحجم (كمية الطلاء) $h.v'(a)=14.4\pi\ cm^3$

تمعن // تكون h في هذا السؤال تساوي (0.1) اما لو كان الشكل مكعبا فانها ستكون (0.2)

لمسات مضيئة للفصل الثالث (التطبيقات ورسم الدوال)

1) خطوات الحل في ايجاد مناطق التزايد والتناقص ونقاط النهاية العظمى والصغرى المحلية

- ❖ إيجاد المشتقة الاولى ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة الناتجة لايجاد قيمة المتغير x .
- ❖ تعويض قيمة x بالمعادلة الاصلية لايجاد قيمة y فتكون مجموعة النقاط (x , y) نقاط حرجة.
- ❖ رسم خط الاعداد الافقي وتثبيت عليه قيم x فقط فيتم تقسيمه الى عدة اقسام ثم نأخذ عدد من كل قسم ونعوضه بالمشتقة الاولى ثم نأخذ من النتائج اشارته فقط.
- ❖ قراءة خط الاعداد فتكون الدالة متزايدة(↗) عند الاشارة الموجبة . وتكون الدالة متناقصة (↘) عند الاشارة السالبة .
- ❖ بيان نوع النقطة الحرجة فتكون عظمى محلية اذا انتقلت قيمة x فيها من التزايد الى التناقص (↗↘) من جهة اليسار وتكون صغرى محلية اذا انتقلت قيمة x من التناقص الى التزايد (↘↗) من جهة اليسار ايضا . وتكون مجرد نقطة حرجة اذا انتقلت قيمة x من التزايد الى نفسه او من التناقص الى نفسه .
- ❖ في حالة الدوال النسبية او الجذرية التي تكون مشتقتها الاولى دالة نسبية بسطها ثابتا فلا يمكن مساواتها بالصفر وبالتالي لاتوجد نقاط حرجة وعند رسم خط الاعداد الاول تثبت عليه القيمة التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة .

2) خطوات الحل في ايجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب

- ❖ ايجاد المشتقة الاولى
- ❖ إيجاد المشتقة الثانية ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة الناتجة لايجاد قيمة المتغير x .
- ❖ تعويض قيمة x بالمعادلة الاصلية لايجاد قيمة y فتكون مجموعة النقاط (x , y) نقاط انقلاب مرشحة.
- ❖ رسم خط الاعداد الافقي وتثبيت عليه قيم x فقط فيتم تقسيمه الى عدة اقسام ثم نأخذ عدد من كل قسم ونعوضه بالمشتقة الثانية ثم نأخذ من النتائج اشارته فقط.
- ❖ قراءة خط الاعداد فتكون الدالة مقعرة(∪) عند الاشارة الموجبة وتكون الدالة محدبة(∩) عند الاشارة السالبة
- ❖ بيان نوع النقطة المرشحة فتكون نقطة انقلاب اذا انتقلت قيمة x من التقعر الى التحدب او بالعكس وتكون ليست نقطة انقلاب اذا انتقلت قيمة x من التقعر الى نفسه او من التحدب الى نفسه .
- ❖ اذا كانت المشتقة الثانية عددا ثابتا او مجموع مربعين فهناك حالتان . اذا كان اكبر من صفر فان الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب . واذا كان اصغر من صفر فان الدالة محدبة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب .
- ❖ في حالة الدوال النسبية او الجذرية التي تكون مشتقتها الثانية دالة نسبية بسطها ثابتا فلا يمكن مساواتها بالصفر وبالتالي لاتوجد نقاط انقلاب وعند رسم خط الاعداد الثاني تثبت عليه القيمة التي تجعل المقام صفر على شكل فجوة .

3) طريقة فحص النقطة الحرجة باستخدام المشتقة الثانية

اذا كانت (x , y) نقطة حرجة فيمكن معرفة نوعها باستخدام المشتقة الثانية حسب الحالات التالية

- ❖ اذا كانت $f''(x) > 0$ فان النقطة الحرجة هي نقطة نهاية صغرى محلية .
- ❖ اذا كانت $f''(x) < 0$ فان النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية .
- ❖ اذا كانت $f''(x) = 0$ فان هذه الطريقة فاشلة في تحديد نوع النقطة وعندها يجب اللجوء الى خط الاعداد.
- ❖ اذا كانت $f''(x) = a$ فان النقطة الحرجة هي عظمى محلية اذا كانت $a < 0$ ، وتكون نقطة نهاية صغرى محلية اذا كانت $a > 0$ دون الحاجة الى معرفة الاحداثي السيني للنقطة الحرجة .

4) لإيجاد قيم الثوابت في اسئلة التهايات يجب ان لا نغفل الملاحظات التالية

- النقطة الحرجة تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الاولى بالصفر من جهة اخرى .
- نقطة الانقلاب تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الثانية بالصفر من جهة اخرى .
- نقطة التماس تحقق معادلة المنحني من جهة وتحقق مساواة المشتقة الاولى بميل المماس من جهة اخرى علما ان ميل المماس اذا لم يكن معلوما فقط تعطى معادلة مستقيم يمس المنحني وعندها يكون ميل المستقيم هو المشتقة الاولى او عن طريق القانون $m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ ، اما اذا كان المماس للمنحني موازيا لمحور السينات او عموديا على محور الصادات فان ميل المماس يساوي صفرا . واذا كان المماس يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فان ميل المماس يساوي $\tan\theta$.
- اذا مر المنحني بنقطة اعتيادية فانها تحقق معادلته فقط .
- اذا علم من النقطة الحرجة قيمة x فقط فنستفيد من مساواة المشتقة الاولى بالصفر فقط .
- اذا علم من نقطة الانقلاب قيمة x فقط فنستفيد من مساواة المشتقة الثانية بالصفر فقط .
- اذا كانت الدالة مقعرة لكل $x>a$ ومحدبة لكل $x<a$ او بالعكس وكانت الدالة مستمرة عند $x=a$ فان للدالة نقطة انقلاب عند $x=a$.
- اذا كانت الدالة لها نهاية (حرجة ، عظمى ، صغرى) قيمتها h فتعني ان $y=h$ وعندها يجب ايجاد المشتقة الاولى ثم مساواتها بالصفر لاستخراج قيمة x فاذا كانت قيمة واحدة فيتم المطلوب واذا علمت اكثر من قيمة واحدة لـ (x) فيجب عرضها على المشتقة الثانية او خط الاعداد الاول للتحقق من نوع النقطة المطلوب .

5) لايمكن رسم أي دالة الا اذا كانت دالة صريحة $y = f(x)$

س1 \\ اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ والدالة مستمرة عند $x = 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيم $a , b , c \in R$.

ans : $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$

س2 \\ اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية صغرى محلية عند $x = 4$ ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $a , b \in R$

ans : $a = -3$, $b = -24$

س3 \\ اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي (8) ونقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيمتي $a , c \in R$.

ans : $a = -1$, $c = 4$

س4 \\ اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من g , f متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت الدالة f نقطة انقلابها هي (1 , -11) فجد قيم الثوابت $a , b , c \in R$.

ans: {1,-3,-9}

س5\\ باستخدام معلوماتك بالتفاضل ارسم منحنيات الدوال التالية

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

b) $y x^2 = 3$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

لمات مضيئة (التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى المحلية)

1) خطوات الحل العامة في اسئلة التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى المحلية هي

- نفرض المتغيرات باسماء معينة.
- ايجاد علاقة بين المتغيرات بالاستفادة من أي عدد في السؤال لجعل احد المتغيرات بدلالة الآخر.
- كتابة القاعدة (الدالة) الملازمة لكلمة اكبر او اصغر او احدى مرادفاتها.
- وضع القاعدة (الدالة) بدلالة متغير واحد بالاستفادة من الخطوة (2). أي دمج (2) مع (3).
- اشتقاق القاعدة ثم مساواتها بالصفر ثم حل المعادلة لايجاد قيمة المتغير الموحد.
- الرجوع الى الخطوتين (2) ثم (1) والتعويض عن المعلوم لايجاد المجهول.
- عرض الناتج على خط الاعداد او المشتقة الثانية للتأكد من كون الناتج اكبر او اصغر مايمكن علما
- ان اغلب الاسئلة يتم اختيار القيمة المطلوبة الناتجة من الخطوة (5) ذهنيا دون الحاجة الى الخطوة (7).
- أي بعد من الابعاد اذا كان مقسم الى قسمين متساويين يفضل ان يفرض بدلالة الضعف مثل الاسطوانة داخل كرة يكون ارتفاع الاسطوانة 2h، او مثلث متساوي الساقين نفرض القاعدة 2x وغيرها.

2) في الاسئلة التي تحتوي على اسمين لقانونين احدهما معلوم القيمة والآخر اكبر او اصغر مايمكن فان الاول يمثل العلاقة والثاني يمثل القاعدة. كما في س40.

3) في الاسئلة التي تحوي على مخروط علم طول وتره او مثلث متساوي الساقين علم طول ساقيه او اسطوانة داخل كرة او مخروط داخل كرة او مستطيل داخل دائرة او مستطيل داخل نصف دائرة او مثلث متساوي الساقين داخل دائرة او مثلث داخل نصف دائرة بحيث ان احد اضلاعه قطر الدائرة (يجب ان يكون قائم) فان العلاقة هي فيثاغورس والقاعدة قانون ذلك الشكل كما في س41.

4) في الاسئلة التي تحوي على مستطيل داخل مثلث او اسطوانة داخل مخروط او مخروط داخل مخروط بشكل مقلوب او مستقيم يمر بنقطة معلومة بحيث يصنع مع المحورين في احد الارباع اصغر مثلث فان العلاقة تكون تشابه مثلثين والقاعدة قانون ذلك الشكل كما في س41 و س43 و س44.

5) في الاسئلة التي تحتوي على معادلة منحنى فان العلاقة معادلة هذا المنحنى والقاعدة القانون الهندسي علما ان لأيجاد نقطة تنتمي الى منحني معين وتكون اقرب مايمكن الى نقطة معلومة فان معادلة المنحنى هي العلاقة وقانون البعد بين نقطتين يمثل القاعدة كما في س45.

6) لايجاد بعدي اصغر مخروط يحيط بكرة نصف قطرها معلوم او ايجاد بعدي اصغر مثلث يحيط بدائرة نصف قطرها معلوم فان العلاقة تكون فيثاغورس ثم تشابه مثلثين معا.

س1\\ جد اقل كمية ممكنة من معدن رقيق تكفي لصنع اسطوانة دائرية قائمة بسعة $432\pi\ cm^3$.

ans: $216\pi\ cm^2$

س2\\ جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\ cm$.

ans: $64\ cm^2$

س3\\ جد بعدي اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته $24cm$ وارتفاعه $18cm$ بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

ans: $y = 9cm$, $x = 12cm$

س4\\ اجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6 ، 8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول اصغر مثلث .

ans: $4x + 3y - 48 = 0$ معادلة المستقيم

س5\\ اجد مساحة اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $8cm$ وطول قطر قاعدته يساوي $12cm$.

ans: $A = \frac{160}{3}\pi\ cm^2$

س6\\ جد نقطة او نقاط تنتمي الى القطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب مايمكن الى النقطة (4 ، 0) .

مجموعة الحل $\{(1, 2), (-1, 2)\}$

الثقة بالنفس نصف النجاح

لمحات مضيئة الفصل الرابع : خاص بالتطبيقي : المجاميع العليا والسفلى

ملاحظه (1) \\ نقوم بإيجاد المشتقه الاولى للمنحنى وإن كانت بإحدى الحالات الاربعه ادناه نقوم بتعويض طرفي كل فتره بالمعادلة الاصلية لاستخراج ناتجين نضع اصغرهما تحت m_i ونضع اكبرهما تحت M_i .

والحالات الاربعه هي :-

1) اذا كانت المشتقة الاولى عددا ثابتا موجبا فنقول ان الدالة متزايدة في كل مجالها وعندها يكون $f(a)=m$, $f(b)=M$.
2) اذا كانت المشتقه الاولى عددا ثابتا سالبا فنقول ان الدالة متناقصة في كل مجالها وعندها يكون $f(a)=M$, $f(b)=m$.
3) اذا كان اصل الدالة ثابتا اي ان مشتقتها تكون صفرا عندها يتساوى m مع M وفي هذه الحاله لايجب الاشتقاق .
4) اذا كانت المشتقة الاولى تحتوي على المتغير x وعند مساواتها بالصفر نجد ان قيمة x المستخرجة لاتنتمي الى الفترة المعطاة .

ملاحظه (2) \\ عناصر σ المعطاة في السؤال هي التي تحدد عدد الفترات المطلوبة وتكون عدد الفترات تساوي (عدد عناصر σ) – 1

ملاحظه (3) \\ اذا طلب في السؤال التقسيم الى n من التجزيئات المنتظمة فنقوم بحساب طول الفترة من خلال القانون $h = \frac{b-a}{n}$ وبعد استخراجها نقوم بإنشاء عناصر σ على ان نبدأ بقيمة a ثم نضيف h في كل مره وننتهي بقيمة b .

ملاحظه (4) \\ اذا لم تعطى عناصر σ في السؤال ولم يطلب التقسيم الى عدد محدد من التجزيئات فنقوم باختيار ماتشاء من التجزيئات ((اثنين على الاقل)) على ان نبدأ بقيمة a وننتهي بقيمة b.

ملاحظه (5) \\ اذا كانت جميع عناصر الجدول موجبة او صفر فيمكن حساب المساحة التقريبية بالقانون $\frac{[illegible]}{2}$ وإن كانت كل عناصر الجدول باستثناء الفترة وطولها سالبة او صفر فيمكن حساب المساحة بمطلق نفس القانون وإن كانت عناصر الجدول بإشارات مختلفة فلا يمكن حساب المساحة ويطلب حينها فقط المجموع الاعلى والاسفل .

ملاحظه (6) \\ يمكن استبدال مطلب المساحة التقريبية بمطلب اخر وهو $\int_a^b f(x)dx$ ويكون نفس الجواب السابق حيث ان $\int_a^b f(x)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$ مع الاحتفاظ بشروط المساحة السابقة

ملاحظه (7) \\ ان كانت المشتقه الاولى تحتوي على المتغير x وعند مساواتها بالصفر نجد ان قيمة x تنتمي الى احدى الفترات الجزئية على الاقل فنقوم بانشاء الجدول ونحسب باقي الفترات حسب التفصيل السابق اي نقوم بتعويض طرفي كل فترة بالدالة الاصلية لاستخراج قيمتين نضع اصغرهما تحت m ونضع اكبرهما تحت M ونؤجل العمل بالفترة التي تنتمي لها قيمة x المستخرجة من مساواة الدالة بالصفر.

ثم نعود الى هذه القيمة ونعوضها بالدالة الاصلية لاستخراج صورتها (قيمة y لها) ثم نقوم ببحث نوع النهاية عن طريق خط الاعداد للمشتقة الاولى او المشتقة الثانية وهي الطريقة الاسهل فان كانت النهاية عظمى اي ان المشتقة الثانية عددا ثابتا سالبا فان قيمة y المستخرجة توضع تحت M وان كانت النهاية صغرى محلية فان قيمة y المستخرجة توضع تحت m عندها نقوم بتعويض طرفي الفترة المؤجلة بالدالة الاصلية (مع التأكيد على ان التعويض يكون دائما بالدالة الاصلية) لأستخراج ناتجين فان كان الحقل الشاغر هو m نضع فيه اصغر الناتجين وان كان الحقل الشاغر هو M نضع اكبرهما ثم نكمل باقي الجدول.

س1 \\ اذا كانت $f : [0,4] \longrightarrow R,\ f(x) = 3x - x^2$ اوجد كلا من المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ ، والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$. حيث $\sigma = (0, 1, 3, 4)$.

ans: $L(\sigma, f) = -4,\ U(\sigma, f) = \frac{13}{2}$

س2 // لتكن $f : [1,5] \longrightarrow R,\ f(x) = 3x - 2$

اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 f$ باستخدام اربعة تجزيئات ثم تحقق هندسيا بحساب مساحة المنطقة تحت المنحني f

ans: $\int_1^5 f = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{56}{2} = 28\ unit^2$

س3 \\ جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$

ans : $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = 3.5$

مشتقات مشتركة

س/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

a) $x^3y^2 - 2y = 5x + 3$ — ans: $\frac{dy}{dx} = \frac{5-3x^2y^2}{2yx^3-2}$

b) $y = (\sin x + \cos x)^2$ — ans: $\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

تذكر \\ $\sin^2x + \cos^2x = 1$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

c) $y = e^{x^2} \ln|2x|$ — ans: $\frac{e^{x^2}}{x} + 2x\, e^{x^2} \ln|2x|$

d) $y = x^2 \ln|x|$ — ans: $x + 2x \ln|x|$

تذكر \\ عند اشتقاق دالة $\ln|f(x)|$ نتجاهل وجود القيمة المطلقة في السؤال

e) $y = \tan(\cos x)$ — ans: $-\sin x . \sec^2(\cos x)$

لاحظ عزيزي الطالب ان $\cos x$ تمثل الزاوية لدالة $\tan$

f) $y = \ln(\tan^2 x)$ — ans: $2\cot x . \sec^2 x$

تذكر \\ اي دالة مثلثية مرفوعة الى قوة يتم اشتقاقها حسب القاعدة السابقة $\tan^2x = (\tan x)^2 \neq \tan x^2$

g) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — ans: $\frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

س\\ برهن انه اذا كانت $y = a^u$ فان $\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$.

تذكر ان $a^u = e^{u \ln a}$

س\\ اثبت فيما اذا كانت الدالة $F : [0, 2\pi] \to R$, $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

هي دالة مقابلة للدالة $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \cos 2x$ ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$

ans: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}$

\\\ لمحات مضيئة للفصل الرابع : التكامل المحدد و غير المحدد للدوال الجبرية ؟ \\\

1) كما نعلم ان التكامل المحدد وغير المحدد يتوزع على الجمع والطرح ولا يتوزع على الضرب والقسمة كما انه لايجاد التكامل لأي قوس مرفوع الى قوة معينة نقوم بايجاد مشتقة داخل القوس فاذا كانت نفسها خارج القوس نطبق القاعدة الخامسة مباشرة وذلك باضافة العدد 1 لقوة القوس الاصلية ثم نضرب في مقلوب الاس الجديد مع الحفاظ على اصل القوس دون تغيير . اما اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارجه بعدد ثابت عندها نقوم بخطوة موازنة ثم نستخدم القاعدة الخامسة . اما اذا اختلفت عنها بمتغير فلا يمكن تطبيق القاعدة الخامسة او غيرها الا بعد اعادة صياغة السؤال بثلاثة بدائل رئيسية الاولى التخلص من القوى التربيعية (مربع حدانية) والثانية بتحليل الحدودية الثلاثية الى مربع كامل (اذا كان حدها الاوسط هو ضعف حاصل ضرب جذري الحدين الاول مع الثالث بشرط ان يكون الحدين الاول والثالث موجبين) والبديل الثالث استخراج عامل مشترك (بين المقدارين يكون باصغر اس) .

2) كما انه لاتوجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل ضرب دالتين وعندها اما نتخلص من الاقواس ثم نستخدم القاعدة الرابعة المباشرة او نستخدم القاعدة الخامسة اذا امكنا الحصول على مشتقة داخل القوس .

3) كما انه لاتوجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل قسمة دالتين عندها يجب التخلص من المقام بعدة طرق اهمها التحليل والاختصار او برفع المقام الى البسط او التحليل ثم رفع المقام الى البسط .

4) عند التكامل المحدد نستخدم نفس الاساليب اعلاه ومن ثم التعويض بالحد الاعلى ثم نعوض بالحد الادنى وبينهما عملية طرح .

5) في التكاملات المحددة التي يكون حدها الاعلى اصغر من الحد الادنى يفضل التبديل بين حدود التكامل ثم اخراج اشارة سالبة خارج التكامل قبل الشروع بالحل .

س/ احسب كلا من التكاملات التالية

1) $\int_{-1}^{1}(3\sqrt[3]{x}+1)^2\,dx$ ans: $\left(\frac{64}{5}\right)$

2) $\int_{-2}^{2}(6x+15)\sqrt{2x+5}\,dx$ ans: $\left(\frac{726}{5}\right)$

3) $\int_{4}^{1}\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$ ans: $\left(\frac{-73}{6}\right)$

4) $\int_{8}^{125}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ans: $\{14\}$

5) $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{3x^3-2x^5}\,dx$ ans: $\{0\}$

6) $\int\frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx \quad , x>0$ ans: $\frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}-1)^3}+c$

7) $\int_{2}^{3}\frac{x^4-1}{x-1}\,dx$ ans: $\frac{313}{12}$

8) $\int\frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$ ans: $\frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8+c$

9) $\int\frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$ ans: $\frac{4}{3}x^3-12x+c$

!!! لمحات مضيئة للفصل الرابع : التكامل المحدد و غير المحدد للدوال المثلثية !!!

1) يكون التكامل مباشرا اذا كان باحد الحالات الستة اعلاه عندها نجري موازنة على الزاوية فقط ثم نطبق القاعدة وهي $(\cos u , \sin u , \sec^2 u , \csc^2 u , \sec u \tan u , \csc u \cot u)$ وللتذكير

If $y=\sin u \rightarrow y' = \cos u\, du$		$\int \cos u\, du = \sin u + c$
If $y=\cos u \rightarrow y' = -\sin u\, du$	$u = f(x)$	$\int \sin u\, du = -\cos u + c$
If $y=\tan u \rightarrow y' = \sec^2 u\, du$	$du = f'(x)$	$\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$
If $y=\cot u \rightarrow y' = -\csc^2 u\, du$		$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + c$
If $y=\sec u \rightarrow y' = \sec u \tan u\, du$		$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$
If $y=\csc u \rightarrow y' = -\csc u \cot u\, du$		$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + c$

2) يكون التكامل باستخدام القاعدة الخامسة اذا وجدت دالة مثلثية مرفوعة الى قوة او قوس مرفوع الى قوة ووجدت مشتقته بجواره عندها نجري موازنة على اصل الدالة مع الزاوية وليست الزاوية فقط كما في (1) كما يجب ان لا تنسى قوانين التحويلات التي توصلنا الى هذه الحالة واهمها

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x , \quad \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

3) لايمكن اجراء التكامل الا اذا كانت الزوايا موحدة وكانت الدوال المثلثة في حالة ضرب عندها نحتاج الى قوانين التحويلات التالية

$$\sin 2ax = 2 \sin ax \cos ax$$

$$\cos 2ax = \cos^2 ax - \sin^2 ax = 2\cos^2 ax - 1 = 1 - 2\sin^2 ax$$ حسب الحاجة

4) تكاملات مربعات الدوال المثلثية في حالة فشل الحالات السابقة ونحتاج الى قوانين التحويلات التالية

$$\tan^2 ax = \sec^2 ax - 1 , \quad \cot^2 ax = \csc^2 ax - 1 , \quad \sin ax \cos ax = \frac{1}{2} \sin 2ax$$

$\cos^2 x =$
- $1 - \sin^2 x$ اذا كان اصل السؤال بقوة فردية
- $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ اذا كان اصل السؤال بقوة زوجية

$\sin^2 x =$
- $1 - \cos^2 x$ اذا كان اصل السؤال بقوة فردية
- $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ اذا كان اصل السؤال بقوة زوجية

5) بعض الحالات الخاصة التي يجب التركيز عليها حيث ان $\sqrt{[f(x)]^2} = \mp f(x)$ في التكامل غير المحدد وان $\sqrt{[f(x)]^2} = |f(x)|$ في التكامل المحدد

س/ احسب التكاملات التالية

1) $\int \frac{\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ ans: $-2\cot\sqrt{x}+c$

2) $\int (\sqrt{x}+x\sec^2x^2)\,dx$ ans: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\tan x^2+c$

3) $\int \frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}dx$ ans: $\frac{-1}{2\tan^2x}+c$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+\tan^3x)\,dx$ ans: $\{\frac{4}{3}\}$

5) $\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x-\sin 3x}dx$ ans: $= \frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+c$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin 2x\,.\tan x\,dx$ ans: $\{\pi-2\}$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\sin^2x\,dx$ ans: $\{\frac{1}{32}\}$

8) $\int \frac{\cos^3x}{1-\sin x}dx$ ans: $\frac{1}{2}(1+\sin x)^2+c$

9) $\int (\csc x\,.\cot x-1)^2dx$ ans: $-\frac{1}{3}\cot^3x+2\csc x+x+c$

10) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ ans: $\pm(-\cos x-\sin x)+c$

11) $\int (\sin x-3\cos 2x)^2dx$ ans: $5x-\frac{1}{4}\sin 2x+4\cos^3x-6\cos x+\frac{9}{8}\sin 4x+c$

هذه الدنيا مسألة حسابية
إجعل من اليوم عبرة - ومن الامس خبرة
إطرح منها التعب والشقاء - واجمع لها الجد والوفاء - واترك الباقي على رب السماء

!!! لمسات مضيئة للفصل الرابع (اهم خواص التكامل المحدد) !!!

1) اذا كانت الدالتين f_2 , f_1 مستمرتين على الفترة $[a , b]$ فأن $\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$ او ان التكامل المحدد يتوزع على الجمع والطرح لأي عدد من الحدود، وغالبا ما نستخدم هذه الخاصية للتعامل مع دوال مقسمة الى قسمين احدهما قابل للتكامل والاخر غير قابل للتكامل .

2) $\int_a^b f = -\int_b^a f$ يفضل استخدامها اذا كان الحد الاعلى اصغر من الحد الادنى

3) اذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a , b]$ وكانت $c \in [a , b]$ فأن $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

4) اذا كان احد حدي التكامل مجهولا وكان ناتج التكامل معلوما نجري عملية تكامل اصولية ثم التعويض لتحول السؤال الى معادلات اعتيادية مع التأكيد على اسئلة الربط بين الفصلين الثالث والرابع .

س8// اذا كان $\int_4^1 f(x)dx = -6$ وكان $\int_1^4 [3f(x) + 2x - c]dx = 42$ جد قيمة c . s:{ -3 }

س9// اذا كان $\int_a^b (2x + 3)\, dx = 12$ ، وكان $a + 2b = 3$ جد قيمتي a , b . { (-7,5),(-1,2) }

س10//

أ) اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2 , 6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x) + 3]dx = 32$ جد $\int_{-2}^1 f(x)dx$. ans : $\int_{-2}^1 f(x)dx = 2$

ب) جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$. ans: a = {-3 , 2}

جـ) لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى (-5) جد $\int_1^3 f(x)dx$. ans:{$\frac{26}{3}$}

د) اذا كان للمنحني $f(x) = (x - 3)^3 + 1$ يمتلك نقطة انقلاب (a , b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$ ans: 46

!!! لمحات مضيئة للفصل الرابع (مشتقات وتكاملات الدوال الاسية واللوغارتمية) !!!

if $y = Ln\,u \Rightarrow y' = \frac{du}{u}$ ..... $\int \frac{du}{u} = ln|u| + c$

اي ان مشتقة Ln u هي مشتقة u مقسوما على u نفسه ويكون ناتج التكامل Ln|المقام| + c ان كانت قوة المقام واحد وكانت مشتقة المقام موجودة في البسط

if $y = e^u \Rightarrow y' = e^u du$ ..... $\int e^u du = e^u + c$

مشتقة e^u هي نفسها مضروبة في مشتقة الاس ، اما تكامل e^u فهي نفسها بشرط الحصول على مشتقة الاس

if $y = a^u \Rightarrow y' = a^u du . Lna$ ..... $\int a^u du = \frac{1}{Lna} a^u + c$

اي ان مشتقة a^u هي نفسها مضروبا في مشتقة الاس مضروبا في Ln الاساس

اما تكامل a^u هي مقلوب Ln الاساس مضروبا في نفسها بشرط الحصول على مشتقة الاس

$Lne = 1 , Ln1 = 0 , e^0 = 1 , Lna^x = x Lna$

$Lne^x = x , e^{Lnx} = x , e^{aLnx} = x^a$

س11 // جد التكاملات التالية

1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2 x}{(2+tanx)} dx$ — ans: ln3

2) $\int cot^3 5x\, dx$ — ans: $-\frac{1}{10} cot^2 5x - \frac{1}{5} ln|sin5x| + c$

3) $\int \frac{1}{x\, lnx} dx$ — ans: $ln|lnx| + c$

4) $\int_{ln3}^{ln5} e^{2x} dx$ — ans: 8

5) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx$ — ans: $\frac{1}{3}[(1+e^1)^3 - 8]$

6) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$ — ans: $e^2 - e$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx} sinx\,dx$ — ans: $-1 + e$

برنامج رحلتي في السادس

!!! لمحات مضيئة للفصل الرابع ; التكامل المحدد للدوال المزدوجة ودوال القيمة المطلقة ; !!!

1) لإيجاد التكامل المحدد للدوال المزدوجة يجب اولا تحديد الحد الفاصل وعندها نتوقع احتمالين اساسيين
الاول !! اذا كانت جميع العناصر المحصورة بين حدي التكامل تنتمي الى احد الجزئين فقط عندها تثبت الاستمرارية على تلك الجزء فقط ونجري التكامل عليه (أو ان عدم تجزئة التكامل تكون اجبارية)
الثاني !! اذا كان الحد الفاصل يقع بين حدي التكامل فان الاستمرارية تكون واجبة لكلا الجزئين وخصوصا عند الحد الفاصل وتجزئة التكامل تكون اجبارية بنسبة تحد الفاصل .

2) لايجاد التكامل المحدد لدوال القيمة المطلقة يجب تحويلها الى دوال مزدوجة ثم نستخدم نفس الاسلوب السابق حيث ان مطلق أي عدد فيه حالتان الاولى اذا كان داخل المطلق موجبا يبقى على حاله والثانية اذا كان داخل المطلق سالبا يضرب في (1-) حسب التمرين التالي علما ان دوال القيمة المطلقة يشار باستمراريتها بشكل مباشر دون الحاجة الى اثباتها .

$|x| = \begin{cases} x & \forall x > 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$ اصبحت دالة مزدوجة حدها الفاصل صفرا

$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & \forall x > 2 \\ -3x+6 & \forall x < 2 \end{cases}$ اصبحت دالة مزدوجة حدها الفاصل (2)

س12 أ) اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ,\forall x \geq 0 \\ 2x & ,\forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ ans : (26)

ب) اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3x & ,\forall x < 1 \\ 4x+3 & ,\forall x \geq 1 \end{cases}$ جد $\int_{2}^{5} f(x)dx$ ans : (51)

س13 أ) اثبت ان $\int_{-2}^{4} |3x-6|dx = 30$

ب) $\int_{-1}^{1} |x+1|dx$ ans : (2)

طريقان ......

الاول غالبيته تعب ومشقة .... وآخره راحة وسعادة

الثاني غالبيته راحة ومرح .... وآخره حسرة وندم

.... فانظر الى نفسك واختر طريقك ....

!!! لمحات مضمنة للفصل الرابع ، المساحات والمسافة !!!

لايجاد هذه المساحة نقوم ابتداءا بمساواة دالة المنحنى بالصفر ثم نحل المعادلة لايجاد قيم x ، ومن ثم نتحول السؤال الى احد الاحتمالات التالية :-

1) اذا علمت فترة في السؤال [a , b] فنقوم بعرض قيم x الناتجة من مساواة الدالة بالصفر عليها فاذا كانت تنتمي لها فنقوم بتجزئة التكامل الى جزئين او اكثر اما اذا كانت طرف فيها او لاتنتمي لها فلا نجزئ التكامل وفي كلتا الحالتين نقوم بسحب القيمة المطلقة الى خارج هذا التكامل .

2) يمكن ان تستبدل الفترة [a , b] في السؤال بعبارة المستقيمين x = a ,, x = b ويكون لها نفس التفسير السابق .

3) اذا لم يعلم فترة او مستقيمين في السؤال فان قيم x الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ترتب تصاعديا ويتم اعتبارها فترات للتكامل دون اهمال أي قيمة وفي هذه الحالة فان قيم x الناتجة تكون على الاقل قيمتين .

4) اذا لم نتمكن من مساواة الدالة بالصفر كأن تكون مجموع مربعين او اذا كانت الدالة لايمكن تحليلها بالطرق المعروفة فان المساحة تكون تكاملا واحدا وعلى الفترة المعطاة .

5) لايجاد المساحة بين منحنى دالتين يجب استخراج دالة مولدة وناتجة من فرق الدالتين وعندها نستخدم نفس الحالات السابقة لكن بالنسبة للدالة المولدة ، مع التأكيد على ان الدالة المولدة إن كان لها اكثر من صورة واحدة عند التبسيط فيجوز اجراء التكامل على أي منها مالم نضرب بعدد او نقسم على عدد او نجذر الطرفين لاي قوة او رفع الطرفين لاي قوة حيث ان هذه العمليات الاربعة تستخدم لحل المعادلات الناتجة من مساواة الدالة بالصفر

6) اذا كانت

- ❖ $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \;, n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2 , ...$ حسب الحاجة
- ❖ $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;, n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2 , ...$ حسب الحاجة
- ❖ $\sin(-x) = -\sin x \;,\; \cos(-x) = \cos x \;,\; \sec(-x) = \sec x \;,\; \csc(-x) = -\csc x \;, ...$
- ❖ اذا كانت $\sin x, \cos x = \pm \{ \frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{\sqrt{2}} \}$ نستخرج زاوية اسناد ثم نستخرج قيمتي x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .
- ❖ اذا كانت $\tan x , \cot x = \pm \{ \frac{1}{\sqrt{3}} , \sqrt{3} , 1 \}$ نستخرج زاوية اسناد ثم نستخرج قيمتي x حسب موقع الزاوية في الارباع الاربعة .
- ❖ اذا كانت $\sin x , \cos x = \{ 1 , -1 \}$ نستخرج قيمة x من خلال موقعها في دائرة الوحدة

إسئلة خاصة بالمساحات

س1 \\ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$. ans : (1)

س2 \\ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi , \pi]$ ans : (4)

س3 \\ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x) = \sin x$, $f(x) = \sin 2x$ وعلى الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$.

ans : $(\frac{1}{2})$ وحدة مساحة

س4\\ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - 6x^2 + 5$ ومحور السينات بالفترة $[2 , 3]$. ج\\ (10)

س5\\ اذا كان لمنحني الدالة $y = ax^3 + bx$ نقطة نهاية عظمى $(-1 , 2)$ جد المساحة بين هذا المنحني ومحور السينات .

ج\\ $(\frac{9}{2})$

س6\\ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x , y = \sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة $[-1 , 1]$. ج\\ $(\frac{1}{2})$

س7\\ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = \cos x + 1 , y = -\cos x$ وعلى الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$.

ج\\ $(\frac{\pi+4}{2})$

س8\\ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x)= \sin^2 2x$, $f(x)=\cos^2 2x$ المعرفتين على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$

ج\\ (1)

س9\\ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $g(x)= \sin x$, $f(x)=\cos x$ المعرفتين على الفترة $[\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2}]$

ج\\ $(2\sqrt{2})$

الازاحة والمسافة والسرعة والتعجيل

1) أ) اذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فان المسافة المقطوعة بالفترة $[a , b]$ هي

$d = \int_a^b |V(t)|dt$ اي يجب مساواة السرعه بالصفر لأستخراج قيمه t ثم عرضها على الفترة المعطاة فاذا كانت تنتمي لها تكون التجزئة اجبارية واذا كانت طرفا فيها او لاتنتمي لها تكون عدم التجزئه اجباريه وفي كلتا الحالتين نسحب المطلق الى الخارج .

ب) اما الازاحة المقطوعه بفترة معينه فهي تكامل السرعه على الفترة المعطاة دون تجزئة او قيمة مطلقة

$$s = \int_a^b V(t)dt$$

جـ)اذا كانت $V(t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فان المسافة المقطوعه في او خلال الثانيه t هي $d = \left| \int_{t-1}^{t} V(t)dt \right|$

د) اذا كانت $V(t)$ تمثل سرعه جسم يتحرك على خط مستقيم فان بعد الجسم بعد مرور t ثانية من بدء الحركه هي $s = \int_0^t V(t)dt$ واذا طلب المسافة المقطوعة بعد مرور t ثانية من بدء الحركة فنعني بالفتره $[0,t]$ ونستخدم شروط المسافة في الفرع (أ)

هـ) اذا كانت $a(t)$ يمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)$ فان $\int a(t)dt = v(t) + c$ ويجب ان يكون تكاملا غير محددا ضمن حدود منهجنا ويجب ان نعلم قيمتي السرعه والزمن في السؤال لاستخراج قيمه c من خلالها عندها يتحول السؤال الى الاحتمالات الاربعة السابقة .

و) اذا كانت معادله السرعه مجموع حدين او اكثر فلا حاجه الى مساواتها بالصفر عند ايجاد المسافة المقطوعة بفترة معينه لان قيم t وان وجدت ستكون سالبه او صفر وفي كلتا الحالتين تهمل

س10\ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/sec$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه . ثم احسب التعجيل عندها . ans: t=25

س11\ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت 90m/sec بعد مرور (4)sec من بدء الحركة جد :

a) السرعة عندما t = 2 . ans: 42 m/sec

b) المسافة خلال الفترة [1 ، 2] . ans: $\frac{98}{3}$ m

c) الازاحة بعد 10sec من بدء الحركة . ans: $\frac{4100}{3}$ m

الحجوم الدورانية

اولا \\ لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $y = f(x)$ ومحور السينات والمستمرة من $x = a$ الى $x = b$ تعرف بالقانون التالي $V = \pi\int_a^b y^2\, dx$

ثانيا \\ لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $x = f(y)$ ومحور الصادات والمستمره من $y = a$ الى $y = b$ تعرف بالقانون التالي $V = \pi\int_a^b x^2\, dy$

ثالثا \\ لإيجاد الحجم الناتج من دوران منحنى حول محور السينات والمستقيم $x = a$ فقط عندها نفرض $y=0$ ثم نعوضها بالمعادلة الاصلية لاستخراج قيمة x الاخرى والعكس بالعكس .

رابعا \\ لاستخراج الحجم الناتج من دوران منحنى حول محور السينات والمستقيم $y = 0$ نقوم بتعويضها بالمعادلة الاصليه لاستخراج قيمتي x والعكس صحيح .

خامسا \\ لايجاد الحجم المتولد من دوران منحنى حول محور السينات والمستقيمين $y = a, y = b$ نقوم بتعويض كل منها بالدالة الاصلية لاستخراج قيمتي x والعكس بالعكس علما ان هذه الملاحظة تم الغاؤها من المنهج الحالي لان فيها اشكال وتم ذكرها من باب الاحتياط .

س12 \\ جد حجم المنطقة المحددة بالمنحني $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ومحور الصادات حيث $1 \le y \le 4$. ans : $\pi \ln 4$

س13 \\ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي . ans : $\frac{9}{2}$

س14 \\ اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin 2x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = 0$. ans : $\frac{\pi^2}{4}$

س15 \\ احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي . ans : $\frac{16}{15}\pi$

برنامج رحلتي في السادس

الحجوم الدورانية

س1\\ اثبت $y = \tan x$ هو حلا للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$

س2\\ اثبت ان $2x^2 + y^2 = 1$ هو حلا للمعادلات التالية

1) $y^3 y'' = -2$ ، 2) $y y'' + (y')^2 = -2$

س3\\ اثبت ان $yx = \sin 5x$ حلا للمعادلة $xy'' + 2y' + 25yx = 0$

س4\\ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ حيث $x = 0 \;,\; y = 0$

ans : $e^{y} = \frac{-2}{e^{2x} - 3} \Rightarrow e^{y} = \frac{2}{3 - e^{2x}} \Rightarrow y = \ln\left(\frac{2}{3 - e^{2x}}\right)$

س5\\ حل المعادلة التفاضلية $\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$

ans : $\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

س6\\ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \, . \cos^2 y$

ans : $\tan y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

س7\\ حل المعادلة التفاضلية $(3x - y)\, y' = x + y$

ans : $\ln|x| + \ln|1 - v| = \frac{2}{(1-v)} + c \Rightarrow \ln|x(1 - v)| = \frac{2}{(1-v)} + c$

$\Rightarrow \ln\left|x\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right| = \frac{2}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)} + c \Rightarrow \ln|x - y| = \frac{2}{\left(\frac{x-y}{x}\right)} + c \Rightarrow \ln|x - y| = \frac{2x}{x - y} + c$

س8\\ حل المعادلة التفاضلية $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$

ans : $\ln|x| = \ln|c(\sin v)| \Rightarrow |x| = |c(\sin v)| \Rightarrow x = \pm c(\sin v) \Rightarrow x = \pm c\left(\sin\frac{y}{x}\right)$

تلميح مهم \ في اسئلة المعادلات التفاضلية ينتهي الحل عندنا بمجرد اجراء التكامل ولكن لانترك الاسس السالبة الى بعد تحويلها الى موجبة ولانترك الاسس النسبية الا بعد تحويلها الى جذور وان كان تكامل الطرفين هو ln فنعتبر ان ثابت التكامل هو lnc لاجل تطبيق خواص ln

كما انصح طلبتنا الاعزاء بعدم التخلي عن الهندسة وخصوصا المبرهنات والنتائج لانها قد تدفع الاحراج عنكم في بعض الاسئلة . متمنيا لكم النجاح الباهر بعونه تعالى

حملة شبابنا

برنامج

رحلتي في السادس

هذا البرنامج يهدف الى خدمة طلاب السادس ومساعدتهم لتخطي هذه المرحلة من خلال توفير ما يحتاجونه من ملازم ونصائح ودروس وكل ما يقدم في مجموعة برنامج رحلتي في السادس هو مجاني حيث ان هذا العمل غير ربحي من دون اي مقابل وانما هو الى اللّه تعالى .....